ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

1. Основные понятия теории вероятностей

2. Вероятностные неравенства
   - Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Для произвольных случайных величин из C_r-неравенства (1.12) получаем

$$\mathsf{E}|S_n|^p \leqslant \max\{1, n^{p-1}\} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|X_j|^p.$$

Налагая дополнительные ограничения на случайные величины, последнее неравенство можно существенно усилить.

Далее в этом параграфе $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Лемма 2.5

Пусть g *— неотрицательная, неубывающая и непрерывная справа функция, заданная на положительной полуоси, и такая, что* $g(0) = 0$. *Пусть* ξ *— неотрицательная случайная величина. Тогда*

$$\mathsf{E}g(\xi) = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}(\xi \geqslant t)\, dg(t). \tag{2.15}$$

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

Так как для любого $a > 0$ имеет место равенство

$$g(a) = \int\limits_0^a dg(x) = \int\limits_0^\infty I(0 < x \leqslant a)\, dg(x),$$

то

$$\mathsf{E} g(\xi) = \mathsf{E} \int\limits_0^\infty I(0 < x \leqslant \xi)\, dg(x) = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}(\xi \geqslant x)\, dg(x).$$

□

Функция $g(x) = x^p$, $x \geqslant 0$, $p > 0$, удовлетворяет условиям леммы 2.5. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.6

Пусть ξ *— случайная величина,* $p > 0$. *Тогда*

$$\mathsf{E}|\xi|^p = p \int\limits_0^\infty t^{p-1} \mathsf{P}(|\xi| \geqslant t)\, dt. \tag{2.16}$$

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Теорема 2.7 (неравенство Розенталя)

Пусть $\mathsf{E}X_j = 0$ *и* $\mathsf{E}|X_j|^p < \infty$ *для некоторого* $p \geqslant 2$, $j \leqslant n$. *Тогда*

$$\mathsf{E}|S_n|^p \leqslant C(p)\Big\{\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}|X_j|^p + \Big(\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\Big)^{p/2}\Big\}, \qquad (2.17)$$

где $C(p)$ *— положительная постоянная, зависящая только от* p.

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

Так как

$$B^2 = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{y_j} t^2 dF_j(t) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E} X_k^2 = B_n^2,$$

то из следствия 2.5 при $y_j = y$, $j \leqslant n$, получаем:

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant y) + 2\exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{B^2 + xy}{y^2}\ln(1 + \frac{xy}{B^2})\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant y) + 2\exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\ln(1 + \frac{xy}{B_n^2})\right\} \qquad (2.18)$$

для любых $x > 0$ и $y > 0$.

Доказательство

Положим здесь $y = x/r$, где $r > p/2$.
Умножим обе части неравенства (2.18) на px^{p-1} и проинтегрируем по области $0 < x < \infty$.
Тогда из (2.16) получим:

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}|S_n|^p &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty p x^{p-1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant x/r)\, dx + 2\int_0^\infty p x^{p-1} e^r \left(1 + \frac{x^2}{rB_n^2}\right)^{-r} dx = \\
&= p\sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty r^p \left(\frac{x}{r}\right)^{p-1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant x/r) d\left(\frac{x}{r}\right) + \\
&+ 2pe^r \int_0^\infty x^{p-1} \left(1 + \frac{x^2}{rB_n^2}\right)^{-r} dx = \\
&= r^p \sum_{1}^{n} \mathsf{E}|X_k|^p + 2pe^r \int_0^\infty x^{p-1}\left(1 + \frac{x^2}{rB_n^2}\right)^{-r} dx.
\end{aligned}
$$

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

Обозначим

$$I = \int\limits_0^\infty x^{p-1}\left(1 + \frac{x^2}{rB_n^2}\right)^{-r} dx.$$

Сделаем замену переменных $t = x^2/(rB_n^2)$. Тогда, как нетрудно заметить,

$$I = \frac{r^{p/2}B_n^p}{2}\int\limits_0^\infty \frac{t^{(p-2)/2}}{(1+t)^r}\, dt.$$

Снова осуществляя замену переменной $z = 1/(1+t)$, окончательно получаем:

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

$$I = \frac{r^{p/2} B_n^p}{2} \int\limits_0^1 \frac{(1-z)^{p/2-1}}{z^{p/2-1}} \frac{z^r\,dz}{z^2} = \frac{r^{p/2} B_n^p}{2} \mathbf{B}\Big(\frac{p}{2}, r - \frac{p}{2}\Big),$$

где $\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ — бета-функция Эйлера.

Доказательство

Таким образом, для любого $r > p/2$ имеет место неравенство

$$\mathsf{E}|S_n|^p \leqslant r^p \sum_{k=1}^n \mathsf{E}|X_k|^p + pe^r r^{p/2}\mathbf{B}\left(\frac{p}{2}, r - \frac{p}{2}\right) B_n^p \leqslant$$

$$\leqslant \quad \max\left\{r^p, pe^r r^{p/2}\,\mathbf{B}\left(\frac{p}{2}, r - \frac{p}{2}\right)\right\}\left(\sum_{k=1}^n \mathsf{E}|X_k|^p + \left(\sum_{k=1}^n \mathsf{E}X_k^2\right)^{p/2}\right),$$

т. е. $C(p) = \max\left\{r^p, pe^r r^{p/2}\,\mathbf{B}\Big(p/2, r - p/2\Big)\right\}$. $\square$

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Следствие 2.7

В условиях теоремы 2.7 *имеет место неравенство*

$$\mathsf{E}|S_n|^p \leqslant c(p) n^{p/2-1} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|X_k|^p,$$

где $c(p) = 2C(p)$.

Доказательство

Применяя неравенство Ляпунова (1.7) с $m = p/2 \geqslant 1$ к случайным величинам X_k^2, получим $\mathsf{E}X_k^2 \leqslant (\mathsf{E}|X_k|^p)^{2/p}$, и, следовательно,

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k^2\Big)^{p/2} \leqslant n^{p/2-1} \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{E}X_k^2)^{p/2} \leqslant n^{p/2-1} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|X_k|^p.$$

Теперь из (2.17) получаем:

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

$$\begin{aligned} \mathsf{E}|S_n|^p &\leqslant C(p)\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}|X_k|^p + n^{p/2-1}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}|X_k|^p\Big) \leqslant \\ &\leqslant 2C(p)n^{p/2-1}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}|X_k|^p. \end{aligned}$$

$\square$

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Неравенство (2.17) справедливо для независимых случайных величин, имеющих моменты порядка $p \geqslant 2$. Получим аналогичное неравенство, также называемое неравенством Розенталя, для случайных величин, имеющих моменты порядка $p \geqslant 1$.

Теорема 2.8 (неравенство Розенталя)

Пусть $\mathsf{E}|X_j|^p < \infty$ *для некоторого* $p \geqslant 1$, $j \leqslant n$. *Тогда*

$$\mathsf{E}|S_n|^p \leqslant C(p)\left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|X_j|^p + \left(\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|X_j| \right)^p \right\}, \tag{2.19}$$

где $C(p)$ *— положительная постоянная, зависящая только от* p.

Доказательство

Пусть y — произвольное положительное число. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{-y}^{y} |x|\, dF_j(x) \leqslant D_n = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|X_j|$$

и из неравенства (2.12)

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant y) + \exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\ln(1 + x/D_n)\right\}. \qquad (2.20)$$

Положим в неравенстве (2.20) $y = x/r$, где $r > p$. Так же как и при доказательстве неравенства (2.17), получаем:

Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин

Доказательство

$$\mathsf{E}|S_n|^p \leqslant r^p \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|X_k|^p + pe^r \int_0^\infty x^{p-1}\Big(1 + x/D_n\Big)^{-r} dx =$$

$$= r^p \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|X_k|^p + pe^r \mathbf{B}(p, r-p) D_n^p.$$

Отсюда следует (2.19). $\square$